Γραμμική Άλγεβρα Ι, Τμήμα Α (Α-Λ), 7/2/2022

Θέμα 1

Α) **(2 Μονάδες)** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Αληθείς ή Ψευδείς.

(i) Ο χώρος των λύσεων του συστήματος

$$x_1 \quad + \quad x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 0$$

$$x_1 \quad + \quad x_3 + x_4 + \cdots + x_n = 0$$

όπου $x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots n$, έχει διάσταση 2.

(ii) Θεωρούμε τους $\mathbb{R}$ −διανυσματικούς χώρους

$$A =< (2,2,0),(2,3,1),(1,1,1) > \text{ και } B =< (0,0,2),(3,0,1) > .$$

Τότε, $\mathbb{R}^3 = A \oplus B$.

(iii) Θεωρούμε έναν διανυσματικό χώρο V και ένα σύνολο A γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων. Τότε, κάθε σύνολο $B \subseteq A$ είναι σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων του V.

(iv) Για τον επιμορφισμό $T\colon \mathbb{M}_{3\times3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_4[x]$. Τότε, ισχύει $\dim_{\mathbb{R}}(\ker T) = 5$.

(v) Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{M}_{4\times3}(\mathbb{R})$ για τον οποίο το ομογενές σύστημα $A \cdot x = \mathbb{O}$, με $x \in \mathbb{M}_{4\times1}(\mathbb{R})$ έχει άπειρες λύσεις

(vi) Για τη γραμμική απεικόνιση $T\colon \mathbb{M}_{4\times4}(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$, υπάρχει $A \in \mathbb{M}_{4\times4}(\mathbb{R})$ μη μηδενικός πίνακας ώστε $T(A) = \mathbb{O}$.

Β) **(1.5 Μονάδες)** Θεωρούμε έναν $\mathbb{R}$ −διανυσματικό χώρο V και έστω Z_1, Z_2 δύο πεπερασμένης διάστασης υπόχωροι του V. Αποδείξτε ότι ο $Z_1 + Z_2$ είναι υπόχωρος του V και στη συνέχεια να βρείτε μια βάση και τη διάστασή του.

Θέμα 2 (2 Μονάδες)

(i) Έστω $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ αντιστρέψιμοι πίνακες. Αποδείξτε ότι αν ο πίνακας $A^{-1} + B$ είναι αντιστρέψιμος, τότε και ο πίνακας $A + B^{-1}$ είναι αντιστρέψιμος και ότι ισχύει:

$$(A + B^{-1})^{-1} = A^{-1}(A^{-1} + B)^{-1}B.$$

(ii) Να προσδιορίσετε για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$ το πλήθος των λύσεων τους γραμμικού συστήματος:

$$\begin{aligned} \lambda x + 3y + 4z &= 6 \\ 2x + 4y + 2z &= 4 \\ y + 3z &= \kappa \end{aligned}$$

Να περιγράψετε το χώρο των λύσεων του παραπάνω συστήματος καθώς και τη διάσταση αυτού, μόνο στην περίπτωση (αν υπάρχει) που το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Θέμα 3 (2.5 Μονάδες)

Θεωρούμε την κανονική την κανονική βάση $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ του $\mathbb{R}^3$ και έστω η $\mathbb{R}$ −γραμμική απεικόνιση $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, της οποίας ο πίνακας αναπαράστασης ως προς τη βάση

$$\mathcal{C} = \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3} \right), (0,1,0), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right\}$$

είναι ο $A_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

(i) Να προσδιορίσετε τον τύπο της απεικόνισης T.

(ii) Αν $A_{\mathcal{B}}$ είναι ο πίνακας της απεικόνισης T ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ του $\mathbb{R}^3$, να προσδιορίσετε έναν αντιστρέψιμο πίνακα P για τον οποίο να δείξετε ότι

$$A_{\mathcal{B}} = P^{-1} A_{\mathcal{C}} P.$$

(iii) Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα $(A_{\mathcal{B}})^n$, για τα διάφορα $n \in \mathbb{N}$. Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

Θέμα 4 (2 Μονάδες)

Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ για την οποία γνωρίζουμε ότι $T((1,-1,0) = (3,0,-3)$ και επίσης

$$\ker T = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 0 \right\}.$$

(i) Να προσδιορίσετε τον τύπο της απεικόνισης T και να βρεθεί στη συνέχεια μια βάση της εικόνας ImT

(ii) Να υπολογίσετε τη βαθμίδα ρης απεικόνισης T. Είναι η απεικόνηση T επιμορφισμός; Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ